

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Инсарская средняя общеобразовательная школа №1»

Подготовка к ЕГЭ
Решение задач на вклады и погашение кредита
11 класс

Чудаева Елена Владимировна, учитель математики
МБОУ «Инсарская СОШ №1»

Разработка занятия элективного курса в 11 классе

Тема: Подготовка к ЕГЭ. Решение задач на вклады и погашение кредита.

Занятие по подготовке к ЕГЭ: практикум.

Цели: повторение теоретического материала по теме «Проценты. Вклады и кредиты», формирование практических навыков решения задач №15 единого государственного экзамена.

Задачи:

образовательные:

- способствовать запоминанию основной терминологии, умению построить математическую модель задачи;
- формировать умение упорядочить полученные знания для рационального применения;

развивающие:

- развитие вычислительных навыков учащихся;
- формирование логического мышления;
- способствовать развитию интереса к математике; умений применять учебный материал на практике и в жизни.

воспитательные:

- развитие коммуникативных умений учащихся через организацию парной работы.

Оборудование к уроку: доска, компьютер с проектором, презентация, задачник по финансовой грамотности.

Ход занятия:

I. Организационный момент

Сегодня на занятии мы рассмотрим прикладные задачи из ЕГЭ по математике, которые имеют прямое отношение к нашей российской экономике. А если быть точным, мы рассмотрим задачи про вклады, проценты и кредиты. Задачи этого типа входят во вторую часть единого

государственного экзамена по математике профильного уровня и являются одними из самых сложных.

Задачи с экономическим содержанием можно разделить на три типа:

- **Задачи о процентах по банковским вкладам** представляют собой типичные задачи на последовательное изменение некоторой величины на определённое число процентов и требуют лишь знания формулы начисления сложных процентов.
- **Задачи на проценты по кредитам.** Этот тип вызывает, как правило, наибольшие трудности у учащихся, несмотря на то, что для их решения требуется лишь определенных вычислительных навыков и соблюдения последовательности действий. Такие задачи в свою очередь делятся на две группы: ту, где выплаты производятся равными платежами (аннуитет) и ту, где выплаты не равны между собой (дифференцированные платежи).
- **Задачи на оптимизацию.** Для решения задач на оптимизацию необходимо составить математическую модель, так как связи между данными можно описать уравнением или неравенством (линейным либо простейшим нелинейным), найти решение средствами математики и дать ответ в зависимости от вопроса задачи.

Вклады и кредиты – самый обширный блок. Здесь вы можете встретить различные схемы возврата кредита или увеличения суммы вклада, и ваша задача – упорядочить данные таким образом, чтобы большой массив текста превратился в удобную математическую схему.

Но прежде чем браться за сложные задачи, давайте уточним, что вы знаете о процентах, вкладах и кредитах.

II. Актуализация знаний учащихся

Фронтальная работа с классом – повторение теоретического материала:

Мы ежедневно слышим с экранов телевизоров такие слова как инфляция, котировки валют, ипотека, банковский процент, депозит и др., а с кредитами и ссудами не понаслышке знакома большая часть населения

России. Тем не менее, большинство из вас, не до конца понимают значение экономических терминов и действие экономических законов, не имеют представления о планировании бюджета, или выбора финансовых инструментов для накопления и приумножения денежных средств.

Давайте разберем финансовые термины, необходимые нам для решения задач с экономическим содержанием.

Банк - финансово-кредитная организация, производящая разнообразные виды операций с деньгами и ценными бумагами и оказывающая финансовые услуги правительству, юридическим и физическим лицам.

Заемщик получает ссуду и обязуется ее возвратить к обусловленному сроку. Заемщик не является собственником ссуженного капитала, он лишь временный его владелец.

Кредитор предоставляет ссуду на время, оставаясь собственником ссуженной стоимости.

Кредит (лат. creditum – ссуда, долг) – это предоставление денег (или товаров) в долг на гарантированных условиях возвратности, платности. Это форма движения денежного капитала, обеспечивающая превращение собственного капитала кредитора в заемный капитал заемщика.

Формы погашения кредита. Кредит можно погасить двумя способами:

1 – разовым погашением, т.е. выплатой всей суммы сразу + все проценты.

2 – рассрочка платежа (выплата по месяцам).

1% - это одна сотая часть чего-либо.

Простой процент (по кредиту) за основу расчетов всегда в течении срока договора принимается сумма кредита.

Сложный процент учитывает, что в каждом последующем периоде сумма, на которую насчитывается процент, увеличивается на размер процентов, полученных в предыдущем период.

Аннуитетный платеж – представляет собой равные ежемесячные транши (платежи), растянутые на весь срок кредитования.

Дифференцированный платеж – представляет собой неравные ежемесячные транши, пропорционально уменьшающиеся в течение срока кредитования.

У каждого из вас есть рабочий листом с заданиями.

Предлагаю заполнить рабочий лист, задание 1.

- Что такое банк?
- Какие виды услуг выполняет банк?
- Что такое кредит?
- Какие виды кредитов существуют?
- Что такое процент?
- Какие проценты бывают в банковских операциях?
- Чем отличаются аннуитетный платеж и дифференцированный платеж?

Проверьте свои ответы (по слайду).

Предлагаю выполнить устную работу:

- 1) Число x увеличили на 20%. Во сколько раз возросло число x ? (в 1,2 раза)
- 2) Число y увеличили на 130%. Какое число получилось? (2,3 y)
- 3) Число z уменьшили на 16%. Какое число получилось? (0,84 z)
- 4) Сколько процентов составляет число 20 от числа 40? (50%)
- 5) Сколько процентов составляет число 300 от 150? (200%)
- 6) В городе два магазина. В первом висит объявление о снижении цен на 80%, во втором – о снижении цен в 5 раз. Спрашивается, какой магазин пойти покупателю, если цены в обоих магазинах до снижения были одинаковыми?

Ответ: покупатель может выбрать магазин, руководствуясь только своим удобством, так как цены будут одинаковы.

Ребята, прежде чем переходить к решению более сложных задач, давайте вспомним шаги решения текстовых задач и терминологию, используемую при решении практико-ориентированных задач с экономическим содержанием.

Решение любой текстовой задачи происходит по следующей схеме:

- Условие задачи необходимо «перевести» на математический язык (составление математической модели).
- Найти решение задачи, используя знание математических формул (работа с составленной моделью).
- Объяснить полученный для математической модели результат в терминах первоначальной задачи.

Основная терминология при решении экономических задач:

S – сумма кредита (руб.)

k – процентная ставка (%)

$m = 1 + 0,01k$ – коэффициент увеличения

X – ежегодная выплата / платеж (руб.)

n – срок кредита (месяц, год)

Для решения задач нам нужны будут формулы для вычисления процентов.

Предлагаю заполнить рабочий лист, задание 2.

Соотнесите название формулы и ее содержание.

Название формулы	Математическая запись (формула)
А) Формула сложных процентов	1) $S = S_0 \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$
Б) Процент от числа	2) $\frac{100}{p} \cdot A$
В) Число по его проценту	3) $S = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$
Г) Формула простых процентов	4) $\frac{p}{100} \cdot A$

А	Б	В	Г

Ответ: 3421

Предлагаю заполнить рабочий лист задание 3.

Заполните пропуски в формулах для подсчета процентов:

- 1) если величину S увеличить на $k\%$, то получим _____
- 2) если величину S уменьшить на $k\%$, то получим _____
- 3) если величину S дважды увеличить на $k\%$, то получим _____
- 4) если величину S дважды уменьшить на $k\%$, то получим _____

Ответы:

$$1) S(1+0,01k); \quad 2) S(1-0,01k); \quad 3) S(1+0,01k)^2; \quad 4) S(1-0,01k)^2.$$

Замечательно! Переходим к задачам связанным с кредитами и вкладами. Вспомните начало урока и скажите, пожалуйста, какие виды платежей в кредитовании вы знаете? (Аннуитетный платеж и Дифференцированный платеж).

Что необходимо знать и понимать при решении задач на погашение кредита равными долями? (выплата производится одинаковыми суммами)

Предлагаю вам разобрать схему погашения кредита равными долями.

Пусть размер кредита S .

Процент банка равен $k\%$, а ежегодная выплата по кредиту равна X .

Тогда через год после начисления процентов и выплаты суммы X размер долга равен: $S(1+0,01k) - X$, $S_1 = Sm - X$

Обозначим коэффициент увеличения суммы через $m = 1 + 0,01k$.

Тогда через два года размер долга составит: $S_2 = (Sm - X)m - X$

Через три года: $((Sm - X)m - X)m - X$, $S_3 = S m^3 - X(m^2 + m + 1)$.

Через четыре года $((((Sm - X)m - X)m - X)m - X)$, $S_4 = S m^4 - X(m^3 + m^2 + m + 1)$.

Через n лет получим:

$$S m^n - X(m^{n-1} + \dots + m^3 + m^2 + m + 1), \quad S_n = S m^n - X(m^{n-1} + \dots + m^3 + m^2 + m + 1).$$

Для подсчета величины в скобках иногда применяется формула суммы n

членов геометрической прогрессии: $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, где $b_1 = 1$, $q = m$.

Тогда выплату долга X , можно найти по формуле

$$X = \frac{S \cdot m^n}{m^{n-1} + \dots + m^3 + m^2 + m + 1}$$

III. Разбор задач на использование практических умений

Предлагаю вам решать задачи в парах. Вам нужно составить математическую модель решения простейших задач на проценты с равными платежами, т.е. составить формулу.

Рабочий лист задание 4. Прочитайте задачи, выделите условие, заполните, что вам известно и составьте модель решения задачи в виде формулы.

Задача №1.

31 декабря Петр планирует взять кредит на сумму 7341000 рублей. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга. Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Ответ: $X = \frac{S \cdot m^4}{m^3 + m^2 + m + 1}$

Задача №2

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 4,24 млн рублей. Сколько млн. рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Ответ: $S_3 = Sm^3 - X(m^2 + m + 1)$

IV. Решение задач по материалам ЕГЭ.

Задача № 1.

31 декабря 2021 г. Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную

сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение:

пусть $S = 9930000$; $m = 1,1$; x = размер ежегодных выплат;

долг через год: $Sm - x$,

долг через 2 года: $(Sm - x) \cdot m$;

долг через 3 года: $((Sm - x)m - x)$.

по условию долг через 3 года станет равен нулю:

$$((Sm - x)m - x)m - x = 0, \text{ или } Sm^3 - xm^2 - xm = x,$$

$$\text{отсюда следует } x(1 + m + m^2) = Sm^3 \text{ или } X = \frac{S \cdot m^4}{m^3 + m^2 + m + 1};$$

$$X = (9930000 \cdot 1,1^3) / 3,31 = 3993000.$$

Ответ: сумма ежегодного платежа 3 993 000 рублей.

Задача № 2.

Иван взял кредит в банке на сумму 804 000 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Иван переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Иван погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Иван заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

Решение:

Пусть $S = 804\,000$ руб., $k = 1 + 0,1 = 1,1$, $n = 3$,

x – сумма которую Иван заплатил в третий раз

Составим таблицу выплат.

Год	Уплаченный долг	Выплаты	Долг
1	$1,1S$	$4x$	$1,1S - 4x$
2	$1,1(1,1S - 4x)$	$2x$	$1,1(1,1S - 4x) - 2x$
3	$1,1(1,21S - 6,4x)$	x	0

Решая уравнение $1,1(1,21S - 6,4x) - x = 0$, находим $X = 1,331S / 8,04$.

Теперь можно подставить вместо S значение суммы взятой в кредит 804 000 руб:

$$x = \frac{1,331 \cdot 804000}{8,04} = 1,331 \cdot 100000 = 133100 \text{ руб}$$

Ответ: последний платёж 133100 руб.

Задача № 3.

Вклад в размере 10 млн.рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн. рублей.

Решение.

Пусть X – сумма пополнения вклада.

Составим таблицу.

год	Сумма вклада на начало года (январь)	Сумма вклада на конец года (декабрь)
1	10 млн.руб	$10 \cdot 1,1$
2	Не меняется	$10 \cdot 1,1 \cdot 1,1$
3	$10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + X$	$(10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + X) \cdot 1,1$
4	$10 \cdot 1,1^3 + 1,1X + X$	$(10 \cdot 1,1^3 + 1,1X + X) \cdot 1,1 = 14.641 + 2,31X$

По условию через четыре года вклад станет не меньше 30 млн. рублей, значит $14.641 + 2,31X \geq 30$, откуда $X \geq 6,6\dots$, так как по условию вклад пополняется на фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей $X = 7$.

Ответ: 7 млн. рублей.

Задача №4. 1 июля не високосного года Мария взяла в банке кредит на сумму 109 500 рублей под 24% годовых сроком на 6 месяцев. Условия погашения кредита: до 1-го числа каждого следующего за июлем месяца,

банк начисляет 24% на оставшуюся сумму долга; после начисления процентов Мария вносит в банк некоторую фиксированную сумму – одну и ту же для каждого платежа. Найдите сумму всех выплат по кредиту.

Анализ условия задачи: начисление процентов на оставшуюся сумму до истечения платёжного периода и погашение равными платежами означает, что схема погашения аннуитетная. Так как начисление процентов и погашение долга происходит ежемесячно, т.е. важно количество месяцев, а не дней в году, информация о том, что год не високосный – лишняя. Чтобы найти проценты, начисляемые ежемесячно, следует годовые проценты поделить на 12.

Решение.

- 1) $24\% : 12 = 2\%$ начисляется ежемесячно на основную сумму долга
- 2) $2\% * 6 = 12\%$ общий процент, начисляемый на долг за 6 месяцев
- 3) $12 * 109\,500 / 100 = 13\,140$ (рублей) начисляемый процент на долг за 6 месяцев
- 4) $109\,500 + 13\,140 = 122\,640$ (рублей) общий долг с учетом процента
- 5) $122\,640 / 6 = 20\,440$ (рублей) ежемесячный платеж

Ответ: 122 640 руб.

V. Самостоятельная работа.

Составьте математическую модель решения задач. Проанализируйте полученные модели (найдите сходство и отличие в составлении уравнения).

Задача 1. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года оказалось, что размер вклада по сравнению с первоначальным увеличился на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Задача 2. 31 декабря 2021 г. Илья взял в банке 80520 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то

есть увеличивает долг на 20%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг четырьмя равными ежегодными платежами?

Задача 1. Решение.

$$\left(\left(\left(\left(3900 \cdot 1,5 + x\right) \cdot 1,5 + x\right) \cdot 1,5 + x\right) \cdot 1,5 + x\right) \cdot 1,5 = 3900 \cdot 8,25, \quad \text{откуда}$$
$$x=210.$$

Ответ: 210 тысяч рублей.

Задача 2. Решение.

$$\left(\left(\left(80520 \cdot 1,2 - x\right) \cdot 1,2 - x\right) \cdot 1,2 - x\right) \cdot 1,2 - x = 0, \quad \text{или откуда } x = 31104.$$

Ответ: 31104 рубля.

V. Обобщение и подведение итогов.

Ребята, для решения задач с экономическим содержанием не достаточно знать основные формулы вычисления выплат, сумм, процентной ставки, нужно развивать вычислительные навыки, вы должны уметь работать с текстом. Условие экономической задачи чаще всего содержит большое количество данных, часть из которых представлена в неявном виде. Поэтому очень важно уметь внимательно читать текст, извлекать, анализировать и критически оценивать полученную из условия задачи информацию.

Финансовая грамотность и математика взаимодополняют друг с друга. Математика – инструмент решения финансовых задач, а финансовая грамотность – поле для совершенствования математических навыков.

Желаю вам успехов в сдаче ЕГЭ и конечно в освоении математической и финансовой грамотности, потому что, личный успех каждого из вас во многом зависит от уровня сформированности этих базовых навыков.

V. Домашнее задание.

<https://math-ege.sdangia.ru/prob-catalog>

раздел 15. Финансовая математика.

Задачи № 511283, 512434

Список литературы

1. Сборник математических задач «Основы финансовой грамотности». В 3 т. Т. 3 для 10–11 классов / Составители: Н.П. Моторо, Н.В. Новожилова, М.М. Шалашова. – Москва, 2019. – 82 с.
2. ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Экономические задачи / Ю.В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2019. – 94с.
3. Сайт «Решу ЕГЭ. Профильный уровень», <https://math-ege.sdangia.ru/>
4. Школа Пифагора ЕГЭ и ОГЭ по математике <https://vk.com/shkolapifagora>

РАБОЧИЙ ЛИСТ К ЗАНЯТИЮ

Задание 1.

Что такое банк? _____

Какие виды услуг выполняет банк? _____

Что такое кредит? _____

Какие виды кредитов существуют? _____

Что такое процент? _____

Какие проценты бывают в банковских операциях? _____

Чем отличаются аннуитетный платеж и дифференцированный платеж?

Верно выполнено _____ задания (max =7)

Задание 2. Соотнесите название формулы и ее содержание.

Название формулы		Математическая запись (формула)	
А) Формула сложных процентов		1) $S = S_0 \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$	
Б) Процент от числа		2) $\frac{100}{p} \cdot A$	
В) Число по его проценту		3) $S = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$	
Г) Формула простых процентов		4) $\frac{p}{100} \cdot A$	
А	Б	В	Г

Верно выполнено _____ задание (max =1)

Задание 3. Заполните пропуски в формулах для подсчета процентов:

1) если величину S увеличить на $k\%$, то получим _____

2) если величину S уменьшить на $k\%$, то получим _____

3) если величину S дважды увеличить на $k\%$, то получим _____

4) если величину S дважды уменьшить на $k\%$, то получим _____

Верно выполнено _____ задания (max =4)

Задание 4. Прочитайте задачи, выделите условие, заполните, что вам известно и составьте модель решения задачи в виде формулы.

Задача №1. 31 декабря Петр планирует взять кредит на сумму 7341000 рублей. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга. Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Ответ: _____ **Верно выполнено _____ задание (max =1)**

Задача №2. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 4,24 млн рублей. Сколько млн. рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Ответ: _____ **Верно выполнено _____ задание (max =1)**

Подсчитайте количество набранных баллов (максимальное число 14 баллов) _____ переведите в % _____

Менее 50% - Вам кредит брать ещё рано! Учите теорию и решайте задачи!

50% -85% - Берем кредит с осторожностью! Теорию вы знаете, осталось подтянуть практику.

Более 85% - Вы акула бизнеса! Зачем вам брать кредит? Делайте вклады!!!

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ПОНЯТИЯ

Вклад (депозит) – сумма денег, переданная человеком или организацией в банк с целью получения дохода. Банк проводит разные финансовые операции с этими деньгами, а за это вкладчик получает процентный доход.

Вклад до востребования – вклад, возвращаемый полностью или частично по первому требованию. Используется в основном для текущих платежей и расчётов.

Срочный вклад – банковский вклад, по которому устанавливается определенный срок хранения. Такой вклад хранится в банке в размере внесённой суммы и возвращается вкладчику полностью вместе с процентным доходом. По условиям вклада иногда бывает возможен досрочный возврат. Но тогда лицо, открывшее вклад, несёт убытки: оно либо уплачивает штраф, либо лишается начисленных процентов.

Процентный доход (доход по вкладу) – доход, получаемый за предоставление денег в пользование кредитным организациям (банкам). Процентный доход зависит от величины процентной ставки и механизма начисления процентов, установленных банком.

Процентная ставка по вкладу – процент вознаграждения от суммы вклада, которое банк обязуется выплатить вкладчику, как правило, отнесённый к году.

Простой процент – исчисление процента дохода по вкладу, при котором наращивание применяется только к начальной сумме вклада.

Сложный процент – исчисление процента дохода по вкладу, при котором наращивание применяется к накопленной сумме.

Капитализация процентов – добавление процентного дохода предыдущего периода к накопленной сумме вклада, позволяющее начислять сложный процент (проценты на проценты).

Инфляция – темп роста общего уровня цен в экономике.

Наращенная сумма депозита (ссуды, долга и т.д.) – первоначальная сумма с начисленными процентами к концу срока.

Кредит – предоставление банком денег во временное пользование на условиях платности, возвратности, обеспеченности (не является обязательным условием) на определенный срок.

Дифференцированный платеж – способ погашения кредита, при котором заемщик выплачивает сумму основного долга кредита равными долями, а проценты начисляются лишь на остаток задолженности.

Аннуитетный платеж – вариант ежемесячного платежа по кредиту, когда размер ежемесячного платежа остается постоянным на всем периоде кредитования.